

الباب الثاني: الدوال المتصلة والتقارب

١ المتتابعات واتصال الدوال

علمنا أن المتتابعة

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

تقاربية ، لكننا لم نتعرف على قيمة نهايتها. لإيجاد تلك النهاية نستخدم الطريقة التالية

$$\begin{aligned}\ln(\ell) &= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= \frac{d}{dx} \ln(1+x) \Big|_{x=0} = 1\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $\ell = e$.

المشكلة الوحيدة في استخدام هذه الطريقة هي التأكد من أن

$$\ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x_n)$$

وهو ما يتحقق نتيجة اتصال الدالة $\ln x$ عند قيمة النهاية (لاحظ أن النهاية موجبة بالتأكد) وذلك حسب النظرية التالية:

١-١- نظرية: الاتصال بالمتتابعات: لتكن $A \subset \mathbb{R}$ ، أي دالة $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ تكون متصلة عند $b \in A$ إذا وفقط إذا كان لأي متتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من عناصر A يتحقق

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(b)$$

برهان - ($\Leftarrow$) نفرض أن f متصلة عند b ونأخذ متتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من عناصر A ونقارب إلى b . ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، من اتصال f نعلم أنه يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\forall x \in A : |x - b| < \delta \implies |f(x) - f(b)| < \varepsilon$$

ومن تقارب المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نعلم أنه يوجد n_0 مناظرة لـ δ بحيث

$$n > n_0 \implies |x_n - b| < \delta$$

باستخدام هاتين العلاقتين نستنتج أن

$$n > n_0 \implies |f(x_n) - f(b)| < \varepsilon$$

($\implies$) سنستخدم طريقة البرهان بالمعكوس الإيجابي ، فنفرض أن f منفصلة عند b ونوجد متتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من عناصر A بحيث $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ بينما $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(b)$.
بسبب انفصال f لابد أن نوجد $\varepsilon_0 > 0$ بحيث لكل $\delta > 0$ يوجد $x \in A$ نحقق $|x - b| < \delta$ لكن $|f(x) - f(b)| \geq \varepsilon_0$.
نطبق هذا لقيمة $\delta = 1/n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ فنستنتج وجود $x_n \in A$ بحيث

$$|x_n - b| < \frac{1}{n} \text{ بينما } |f(x_n) - f(b)| \geq \varepsilon_0$$

يؤدي هذا لأن المتتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقتارب إلى b بينما $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ لا يمكن أن تقتارب إلى $f(b)$.

يمكن إعادة صياغة هذه النظرية على الصورة:

لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}$ فإن

$$f \text{ متصلة على } A \iff \text{لأي متباعدة } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : A \supset (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

٢-١- أمثلة على تطبيق النظرية: نستخدم هذه النظرية بطريقتين، الأولى لتمثل في استخدام اتصال دالة معروفة لحساب نهاية متتابعة معينة، الاستخدام الثاني للنظرية يكون في إثبات انفصال دالة معطاة بإيجاد متتابعة تخالف شرط الاتصال المعطى في النظرية.
حساب نهايات المتتابعات:

(١) لنكن $y_n = n \sin(1/n)$ ، نضع $x_n = \frac{1}{n}$ ونحن نعلم أن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ونلاحظ أن

$$y_n = \frac{\sin(x_n)}{x_n}$$

نأخذ $f(x) = \begin{cases} \sin(x)/x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ فنجد أن f متصلة عند 0 وبالتالي نحصل من النظرية على:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(0) = 1$$

$$(٢) \text{ لنكن } y_n = \frac{2(n+3) \sin^2(\frac{n}{n+1}\pi)}{n+1} \text{ يمكننا كتابة}$$

$$y_n = 2 \frac{n}{n+1} \sin^2(\frac{n}{n+1}\pi) + 6 \frac{\sin^2(\frac{n}{n+1}\pi)}{n+1}$$

الحد الثاني عبارة عن حاصل ضرب المتتابعة المحدودة $u_n = \sin^2(\frac{n}{n+1}\pi)$ في المتتابعة $z_n = \frac{6}{n+1}$ التي تؤول للصفر، وبالتالي تكون نهاية هذا الحد هي الصفر. لدراسة الحد الأول نضع $f(x) = 2x \sin(\pi x)$ و $x_n = \frac{n}{n+1}$ فنجد أن f متصلة عند $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ وبالتالي تكون نهاية الحد الأول هي $f(1) = 0$.

إثبات انفصال الدوال:

$$(٣) \text{ لتكن } f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \text{ نأخذ } x_n = \frac{1}{n\pi} \text{ و } y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \text{ فنجد أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \text{ بينما}$$

وهو ما يثبت أن f غير متصلة عند 0 أيًا كان اختيار قيمة a .

(٤) لتكن

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, \gcd(p, q) = 1, x \neq 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

نود دراسة اتصال الدالة f . نبدأ أولاً بدراسة اتصال f عند نقطة $x_0 \in \mathbb{Q}$. هنالك بالتأكيد متتابعة $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من الأعداد غير القياسية نؤول إلى x_0 (نأخذ مثلاً: $t_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$). لمثل هذه المتتابعة نجد أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = 0 \neq f(x_0)$$

وبالتالي فإن f غير متصلة عند x_0 .

ندرس أيضاً اتصال f عند $x_0 \notin \mathbb{Q}$. هنا نحتاج للنظرية التالية:

إذا كانت $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد القياسية نؤول لعدد غير قياسي x_0 فإن $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير محدودة.

ينتج من هذه النظرية أنه إذا كانت $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أي متتابعة من الأعداد الحقيقية نؤول إلى x_0 فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = 0 = f(x_0)$ لأن صور الحدود القياسية من المتتابعة نؤول إلى 0 (حيث أن المقامات نؤول إلى $+\infty$) وصور الحدود غير القياسية تساوي الصفر من تعريف الدالة. بالتالي نستنتج أن f متصلة عند x_0 .

أي أن الدالة f متصلة عند جميع النقاط غير القياسية ومنفصلة عند النقاط القياسية.

٣.١ أسئلة. إدرس صحة أو خطأ كل من العبارات التالية

(١) إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ فإن f متصلة عند a .

(٢) إذا كانت f غير متصلة عند a وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ فإن $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ تباعدية.

(٣) إذا كانت f دالة متصلة عند a وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

(٤) لأي دالة متصلة : تقارب $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يكافئ تقارب $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

(٥) إذا كانت $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعاتان في نطاق الدالة المتصلة f وكانت $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y_n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$.

٤.١ تمارين.

(١) إدرس تقارب كل من المتتابعات التالية:

$$\begin{aligned}
(ا) \quad x_n &= \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) & (هـ) \quad x_n &= \frac{\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2+n-1}} \\
(ب) \quad x_n &= \tan\left(\frac{2^n\pi}{(2^{n+2}+n+5)}\right) & (و) \quad x_n &= \cos\left(\frac{\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+n+1}}\pi\right) \\
(ج) \quad x_n &= \sqrt{\frac{n^2}{n^2+5n+3}} & (ز) \quad x_n &= (e^{-n} + 1)^{e^n} \\
(د) \quad x_n &= \frac{3\sqrt{n^3+n+2}}{n+1} & (ح) \quad x_n &= \frac{2n^3-n}{\sqrt{n^3+1}} \cos^2(\sqrt{n^3+2}) - \frac{n^3-5n}{n^3+1}
\end{aligned}$$

(٢) إدرس اتصال كل من الدوال الآتية:

$$\begin{aligned}
(ا) \quad a &\in \mathbb{R}, f(x) = x^a \\
(ب) \quad f(x) &= \begin{cases} 1/x, & x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases} \\
(ج) \quad f(x) &= \begin{cases} p/q^2 & x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}
\end{aligned}$$

(٣) برهن: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $A \subset \mathbb{R}$ وليكن $a \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم لـ A ، إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ فإن

لأي متتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $A \supset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إذا تحقق $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell$.

(٤) ليكن a عدد حقيقي موجب، ولتكن $x_n = n(n\sqrt{a} - 1)$

(ا) برهن أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة تقاربية،

(ب) لتكن $u(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ برهن أن

$$(ab)^{1/n} - a^{1/n} - b^{1/n} + 1 = (a^{1/n} - 1)(b^{1/n} - 1)$$

ومن ذلك استنتج أن $u(ab) = u(a) + u(b)$

(ج) برهن أن u دالة متصلة.

٢ الاتصال المنتظم

الدالتان $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2$ متصلتان على $\mathbb{R}$ لكن هناك اختلاف بين طريقة إثبات اتصال كل منهما.

لإثبات اتصال f : نأخذ $x_0 \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon > 0$ ، ونختار $\delta = \varepsilon$ فنجد أن

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

أما بالنسبة لـ g : فنأخذ $x_0 \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon > 0$ ونختار $\delta = \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$ فنجد

$$\begin{aligned}
|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0| |x + x_0| \\
&\leq |x - x_0| (2|x_0| + |x - x_0|) < \varepsilon
\end{aligned}$$

هل لاحظت الفرق؟ اختيارنا لـ δ لا يعتمد على x_0 بالنسبة للدالة f ، أما بالنسبة للدالة g فإن δ تعتمد على x_0 .

١-٢-تعريف: لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ، نقول أن f متصلة بانتظام على A إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ يوجد } \delta > 0 \text{ بحيث}$$

$$\forall x, y \in A : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

من الواضح أن أي دالة متصلة بانتظام هي في الأساس متصلة، ومما سبق نعلم أن الدالة $g(x) = x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$ لكن اتصالها غير منتظم.
التعريف والنظرية التاليان يعطيان طائفة كبيرة من الدوال المتصلة بانتظام.

٢-٢-تعريف: نقول أن الدالة f تحقق شرط ليشتز (Lipchitz condition) على A إذا وُجد عدد M بحيث

$$\forall x, y \in A : |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$$

٣-٢-نظرية: إذا كانت f تحقق شرط ليشتز على A فإن f متصلة بانتظام على A .

البرهان متروك للقارئ..

٤-٢-نتيجة: إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على A وكانت مشتقتها محدودة على A فإن f متصلة بانتظام على A .

برهان - من نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة يمكن استنتاج أن f نحقق شرط ليشتز

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y| \quad \forall x, y \in A$$

حيث $M = \sup_{x \in A} |f'(x)|$.

هل يمكن تمييز الدوال المتصلة اتصالاً منتظماً باستخدام المتتابعات؟ هذا ما سنراه في النظريتين التاليتين.

٥-٢-نظرية: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ تكون متصلة بانتظام على A إذا كان فقط إذا كان:

لأي متابعتين $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من عناصر A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$$

برهان - ($\Leftarrow$) لتكن $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة بانتظام على A ولتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متابعتان من عناصر A بحيث

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y_n = 0$$

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، من تعريف التقارب المنتظم يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\forall x, y \in A : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ومن تعريف التقارب فإنه لهذه ال δ يوجد n_0 بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \implies |x_n - y_n| < \delta$$

بدمج العبارتين نجد أن

$$n > n_0 \implies |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$$

وهو ما يثبت أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$$

($\implies$) نفرض أن f ليست متصلة بانتظام. معنى ذلك أنه يوجد $\varepsilon_0 > 0$ بحيث لأي $\delta > 0$ يوجد عنصرين $x, y \in A$ بحيث $|x - y| < \delta$ لكن $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$. لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نأخذ $\delta = \frac{1}{n}$ فيوجد بالتالي x_n, y_n بحيث $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ لكن $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. المتتابعتان $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نحققان $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y_n = 0$ لكن $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - f(y_n) \neq 0$.

٦-٢- نظرية: إذا كانت $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة بانتظام على A فإن صور أي متتابعة كوشية من عناصر A تكون متتابعة كوشية.

برهان - لتكن f متصلة بانتظام على A حيث $A \subset \mathbb{R}$ ولتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة كوشية من عناصر A وليكن $\varepsilon > 0$ معطى. من شرط الانصال المنتظم يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\forall x, y \in A : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ومن شرط كوشي نجد أن لقيمة δ يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n, m > n_0 \implies |x_n - x_m| < \delta$$

بدمج هاتين العلاقتين نجد أن

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n, m > n_0 \implies |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

وهو ما يثبت أن $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة كوشية.

تستخدم هذه النظرية بسهولة لإثبات أن دالة ما ليست متصلة بانتظام

٧-٢- مثال: لتكن $f(x) = 1/x$ حيث $x \in]0, 1]$. بأخذ $x_n = \frac{1}{n}$ نجد أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة كوشية، بينما $f(x_n) = n$ وبالتالي فإن $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ليست كوشية، ينتج من ذلك أن f ليست متصلة بانتظام على $]0, 1]$.

عكس النظرية السابقة ليس صحيحاً على وجه العموم ، فالدالة $g(x) = x^2$ تحقق أن صور أي متتابعة كوشية من عناصر $\mathbb{R}$ تكون متتابعة كوشية، لكن هذه الدالة غير متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$. لكن عكس تلك النظرية صحيح في حالة ما إذا كانت A مجموعة محدودة.

٨-٢- نظرية: لتكن $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة محدودة، إذا كانت $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ دالة تحقق أن صور أي متتابعة كوشية من عناصر A تكون متتابعة كوشية ، فإن f متصلة بانتظام على A .

برهان - نفرض أن f نحقق أن صور أي متتابعة كوشية من عناصر A تكون متتابعة كوشية. ولنفرض جدياً أن f ليست متصلة بانتظام على A . من نظرية (٥.٢) لابد أن نجد متابعتان $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من عناصر A بحيث $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n - y_n = 0$ لكن $\lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) - f(y_n) \neq 0$. وحيث

أن A مجموعة محدودة فإن نظرية هاين - بوريل (٩.٥) تضمن إمكان استخراج متابعتان جزئيتان كوشيتان $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ و $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ، نضع

$$z_k = \begin{cases} x_{n_k}, & k \text{ عدد زوجي} \\ y_{n_k}, & k \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

ف نجد أن $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ متتابعة كوشية لكن $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{k+1}) - f(z_k) \neq 0$ أي أن $(f(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ليست متتابعة كوشية وهو ما يناقض فرض النظرية.